Revista Brasileira Multidisciplinar
ISSN 1415-3580
e-ISSN 2527-2675

http://revistarebram.com/index.php/revistauniara

Os números primos de Ishango

Carla Santos*

*Centro de Matemática e Aplicações, FCT, Universidade Nova de Lisboa, departamento de Matemática e Ciências Físicas, Instituto Politécnico de Beja -Portugal
*Autor para correspondência e-mail: carla.santos@ipbeja.pt

Palavras-chave

Motivação
História da Matemática
Números primos
Osso de Ishango

Keywords

History of Mathematics
Prime numbers
Ishango bone

Resumo

Desde tempos longínquos que os números primos têm fascinado o Homem e despertado o interesse de inúmeros matemáticos. Muito se tem evoluído no conhecimento dos números primos desde que estes foram, há milénios, representados pela primeira vez, no osso de Ishango. Mas a tarefa de decifrar o misterioso conjunto dos números primos reveste-se de grandes dificuldades devido à inexistência de um padrão regular na sua distribuição e consequente ausência de uma "fórmula" capaz de gerar todos os números primos. Vestígios, chegados até aos nossos dias, provam que os números primos eram conhecidos pelos Babilónios, os Egípcios ou os Persas e que na Grécia Antiga o estudo dos números primos ganha expressão. Mas, acreditando na hipótese formulada De Heinzelin (1962), o conhecimento da primalidade pode ser muito anterior às civilizações da Antiguidade, uma vez que alguns dos agrupamentos de marcas existentes no osso de Ishango representam números primos. No presente trabalho pretende-se diversificar o estudo do osso de Ishango, analisando os números primos nele representados e associando-os a algumas das famílias especiais de números primos conhecidas, contudo não é nosso objectivo apoiar ou refutar alguma das teorias referentes à interpretação das marcas presentes no osso de Ishango.

Abstract

The prime numbers of Ishango

Since distant times prime numbers have fascinated the Man and interested countless mathematicians. Much has been evolved in the knowledge of prime numbers since they were represented, for the first time, in the Ishamgo bone. But deciphering the mysterious set of prime numbers has great difficulties due to the absence of a regular pattern in its distribution and consequent absence of a "formula" capable of generating all prime numbers. Vestiges, which have reached our days, prove that the prime numbers were known by the Babylonians, the Egyptians, or the Persians and that it is in Ancient Greece that the study of prime numbers gains expression. But, believing in De Heinzelin's (1962) hypothesis, knowledge of primality may be much earlier than the civilizations of antiquity, since some of the clusters of marks in the Ishango bone are prime numbers. In the present work we intend to diversify the study of the Ishango bone by analyzing the prime numbers represented therein and associating them with some of the known special families of prime numbers, but it is not our objective to support or refute some of the theories regarding the interpretation of the marks present on the Ishango bone

Recebido em: 06/11/2018
Aprovação final em: 11/02/2019
DOI: 10.25061/2527-2675/ReBraM/2019.v22i2.638

Introdução

Desde tempos longínquos que os números primos têm fascinado o Homem, e esse encantamento não se desvaneceu ao longo dos milénios decorridos entre as gravações do osso de Ishango e os nossos dias. Diferentes gerações de matemáticos, utilizando os métodos disponíveis à sua época, têm caminhado pelo mundo dos números primos tentando desvendar um dos mistérios mais bem guardados do universo matemático.

Buscar as origens da Matemática implica visitar os primórdios da história da Humanidade, cruzando as diferentes etapas da sociedade humana e do desenvolvimento da inteligência.

Durante o período Paleolítico, o nomadismo, de uma sociedade caçadora e recolectora, determinava as reduzidas exigências à capacidade intelectual do Homem. Sendo aceitável que, já nesses tempos, o Homem possuísse o sentido de número, esse era um sentido mais qualitativo do que quantitativo, em que "um" seria antes um artigo indefinido do que um numeral (STRUIK,1948).

Decorrente das mudanças climáticas que compeliram a humanidade para uma sociedade sedentária, o Homem teve de enfrentar desafios até aí desconhecidos. Nessa nova etapa da história da espécie humana, designada por Neolítico, em que surgiram os alicerces da sociedade actual, o espírito empreendedor do Homem começou a transformar o meio ambiente, de modo a adaptá-lo às suas necessidades.

Perante a evidência de que a sobrevivência da humanidade carecia da compreensão dos ciclos da natureza, o Homem dedicou renovada atenção à Terra, à Lua, ao Sol e às outras estrelas, tentando dar respostas aos novos desafios impostos pela dependência da agricultura e pastorícia e crescente complexidade da vida em comunidade, daí decorrente. Mas para o homem primitivo nada havia, imediatamente utilizável, que pudesse suprir as suas necessidades de instrumentos e técnicas (CAMPOS, 2017). E como a necessidade aguça o engenho, o Homem primitivo deita mão ao que a natureza põe à sua disposição e, fruto da sua capacidade intelectual, transforma paus e pedras em ferramentas, para com estas desenvolver novas ferramentas e técnicas, e exterioriza os produtos da sua mente em manifestações que ficaram registadas, como as marcas deixadas deliberadamente em diversos materiais, as pinturas rupestres ou a arte megalítica.

É comumente aceite que os vestígios históricos, chegados aos nossos dias, provam que Babilónios, Egípcios e Persas tinham conhecimento dos números primos, e que na antiga Grécia esses números despertavam grande interesse de estudo. Contudo há quem defenda que o conhecimento dos números primos é muito anterior a essas civilizações e que a prova disso está no osso de Ishango.

Independentemente de as marcas do osso de Ishango testemunharem ou não a existência da consciência da primalidade, à época do(s) seu(s) autore(s), é inequívoco que existem nesse osso representações de números que são números primos.

A abordagem que o presente trabalho fará à presença de números primos no osso de Ishango, não pretende apoiar nem refutar nenhuma teoria acerca da intencionalidade de representação de números primos, mas antes caracterizar os números primos lá presentes de acordo com seis famílias especiais de números primos.

As manifestações de pré-concepções matemáticas

Da percepção da diferença entre distintas quantidades surgiu a necessidade de contar com precisão. As primeiras formas de contagem terão passado pela utilização dos dedos das mãos e dos pés, pelo agrupamento de pedras, conchas ou paus, mas também, registando as quantidades que pretendiam representar por incisões nas cascas das árvores, paus ou ossos. Fosse para determinar a altura certa para semear ou colher, registando as fases da Lua, fosse para controlar o número de animais do seu rebanho, ou com qualquer outro objectivo, o Homem começou a contar, traduzindo, conscientemente, o que em

Matemática se designa por correspondência biunívoca.

Como defendem d'Errico et al. (2003, p.31) "o ponto de inflexão fundamental na evolução das actividades cognitivas e a transmissão cultural humanas teve lugar quando o Homem foi capaz, pela primeira vez, de armazenar conceitos com a ajuda de símbolos materiais e ancorar ou mesmo situar memórias fora do cérebro individual". Indubitavelmente, os registos de contagens, que chegaram até aos dias de hoje, são prova disso mesmo, colocando as manifestações matemáticas no centro de todo o processo evolutivo da espécie humana.

Para conjecturar sobre a presença e significado das manifestações matemáticas das sociedades pré-históricas, os historiadores recorrem a peças arqueológicas que aparentam apresentar diversas formas de pré-concepções matemáticas, tendo que discernir entre os registos deliberados desse produto do pensamento humano, expresso em representações simbólicas, de outras marcas originadas por actividades meramente funcionais ou resultantes de processos naturais.

Do rol de objectos arqueológicos contendo marcas que podem ser interpretadas como expressões "matemáticas" simbólicas, do Homem primitivo, constam vários ossos, cujos mais antigos exemplares foram datados como pertencentes ao Paleolítico Superior. Num osso de pata de babuíno, com mais de 35000 anos, que se considera o mais antigo registo matemático conhecido, denominado Osso de Lebombo, é possível observar 29 marcas, cujas tentativas de interpretação, deram origem às hipóteses de as marcas poderem estar associadas às fases da lua ou à hipótese de revelar a contagem dos dias do ciclo menstrual, denominada conjectura de Zaslavsky (Bangura, 2012, Redondo, 2010). Noutro osso, agora de lobo, com cerca de 30000 anos a disposição das marcas revela, formações de grupos de 5 marcas, e a presença de marcas maiores que parecem propositadamente pretender separar uma série de 30 de uma série de 25 traços (p.e. Stewart, 2007, pp. 3-4).

Entre os vários registos matemáticos, em ossos, destaca-se o osso de Ishango, cuja idade estimada aponta para os 20000 anos (segundo outros, 90000 anos). De uma riqueza incomparavelmente superior aos referidos anteriormente em termos do significado das marcas nele registadas, este vestígio que é considerado o mais antigo objecto matemático (Ishango Milele Foundation, 2018), por revelar não só o conhecimento dos números como também das suas propriedades, tem-se mostrado um verdadeiro quebra-cabeças para os investigadores que se dedicam a decifrá-lo.

O osso de Ishango

O osso de Ishango foi descoberto pelo belga Jean Heinzelin de Braucourt, na década de 50 do séc. XX, em Ishango, próximo da actual fronteira entre o Congo e o Uganda (PICKOVER, 2009) e está actualmente exposto no Museu do Real Instituto de Ciências Naturais, na Bélgica (Figura1).

Com um comprimento aproximado de 10 cm, o osso de Ishango teria sido uma ferramenta, composta por uma extremidade cortante (devido à presença de um fragmento de quartzo embutido) e um cabo. A extremidade cortante sugere que poderia ter servido para a escarificação ritual da pele ou para gravação. A presença, no cabo, de três colunas paralelas, de linhas distribuídas irregularmente, sugere que terá servido também de suporte a algum tipo de registo quantitativo (PLETSER, 2012).

O interesse pelo osso de Ishango teve expressão internacional logo que o seu descobridor, Jean de Heinzelin de Braucourt, publicou a descrição do seu achado, dada a sua inequívoca singularidade e contribuição para o conhecimento dos primórdios da Humanidade.

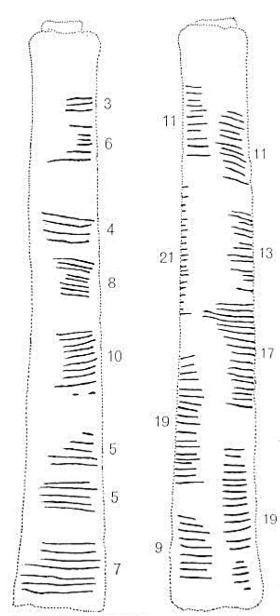
Figura 1 - Osso de Ishango, exposto no Real Instituto de Ciências Naturais, na Bélgica.

Fonte: (imagem de https://www.realclearscience.com/blog/2015/11/the_earliest_evidence_of_logical_reasoning.html).

A descrição das incisões no osso de Ishango

Ao longo do comprimento do osso de Ishango, estão presentes 168 linhas distribuídas por três colunas e dispostas como se pode observar na figura seguinte, que apresenta o desenho apresentado pelo próprio De Heinzelin(Figura 2), quando da divulgação da descrição das características do osso de Ishango.

Figura 2 - Desenho de De Heinzelin, detalhando as marcas do osso de Ishango.



Fonte: PLETSER; HUYLEBROUCK, 1999.

As três colunas apresentam-se de forma aproximadamente paralela, contudo as linhas nelas gravadas estão agrupadas de forma assimétrica, o que pressupõe que a sua presença envolvia um carácter funcional e não decorativo. Esta assimetria das marcas não manifesta, contudo, um carácter aleatório na sua distribuição, mas antes, a representação de conceitos matemáticos (CREVECOEUR *et al*., 2016)

Ao longos dos anos, muitos investigadores têm formulado diversas hipóteses para fundamentar os agrupamentos das linhas marcadas no osso de Ishango. A primeira interpretação, realizada pelo seu descobridor, alvitrava tratar-se de uma espécie de jogo aritmético, criado por indivíduos conhecedores de um sistema numérico de base 10, da duplicação e de números primos (DE HEINZELIN, 1957, 1962). A interpretação proposta por Marshack (1972) sugere que o osso seria usado como calendário lunar e a de Pletser ; Huylebrouck (1999) propõe uma conecção com o sistema duodecimal.

Independentemente da explicação encontrada, para cada um dos pormenores presentes no osso de Ishango, é indiscutível o facto de que aqueles registos, à data em que foram feitos, demonstram interesse pelos "números".

Os números primos

Do ponto de vista da estrutura multiplicativa dos números inteiros, os números primos são os números mais simples tendo, no entanto, a extraordinária capacidade de gerar todos os demais números naturais, designados por números compostos.

A razão por que os números primos são os mais simples de todos os números inteiros advém da sua própria definição:

Um número primo é aquele que tem exactamente dois divisores, 1 e ele próprio.

A verificação se um número é primo, consiste na busca dos seus divisores. Essa é uma tarefa de grande simplicidade para os primeiros números primos. Verificar, por exemplo se os números 5 e 6 são números primos é elementar. Dividindo estes números por todos os números naturais inferiores a ele, verificamos que 5 tem dois divisores, o 1 e 5, e que 6 tem quatro divisores, 1, 2, 3 e 6, concluindo-se que 5 é um número primo mas 6 não é. Usando o mesmo método destes exemplos é fácil verificar que entre os primeiros dez números naturais existem quatro números primos: 2, 3, 5 e 7. Atentando a este pequeno conjunto de números primos, podemos já ter um leve vislumbre do fascínio que os números primos exercem sobre o Homem. Aqui encontramos:

- o mais especial de todos os números primos, o 2, por ser o único par que é número primo;
- a única dupla de primos contíguos, formada pelo 2 e o 3;
- o 5 que é o único número primo terminado no algarismo 5;
- o único terno de números primos gémeos, isto é, números primos ímpares consecutivos, formado pelos números 3, 5 e 7.

Olhando mais além na recta numérica verificamos que a distribuição dos números primos é muito irregular e a sua presença progressivamente mais rara. Entre 1 e 1000 existem apenas 168 primos, entre os quais surgem sequências de números compostos, designadas por lagos ou desertos, cuja dimensão pode ser qualquer. Na presença de lagos de grandes dimensões, a descoberta de novos primos à medida que se avança no conjunto dos números naturais torna-se uma tarefa cada vez mais árdua.

Numa tentativa de agilizar a procura de novos números primos, o grego Eratóstenes, no século III a.C., apresentou aquele que é o mais antigo algoritmo conhecido para a descoberta de números primos: o Crivo de Eratóstenes.

A partir do Quadro 1 os números naturais são dispostos em linhas de 10, semelhante à que aqui apresentamos (onde estão representados os cem primeiros números naturais), Eratóstenes propôs um procedimento para a determinação de números primos que consiste em eliminar o 1, que não é primo; eliminar todos os múltiplos de 2, à excepção do próprio 2 que é primo, e repetir o processo para os números não eliminados, a começar por 3 que é primo, até já não haver múltiplos para eliminar. Desta forma obtêm-se todos os números primos existentes entre 1 e 100 – apresentados a sombreado na Quadro 1.

Quadro 1- Crivo de Eratóstenes.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Para testar a primalidade de, por exemplo, 391 não será muito prático usar o algoritmo de divisões sucessivas, para encontrar os seus divisores, nem prolongar o crivo de Eratóstenes.

Sendo suficiente existir um divisor próprio de um número (que não 1), para que este número seja classificado como composto, decorre da própria definição de número primo, que a descoberta do menor divisor próprio de um número (que não 1) é o bastante para a classificação desse número.

Considerando que um número composto n pode ser representado como $n = a \times b$, onde a é primo e b pode ser primo ou composto e $1 < a \leq b < n$.

Supondo que $a > \sqrt{n}$ então $n = a \times b > \sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$, o que é absurdo. Logo todo o número composto tem um divisor que é um número primo, $p \leq \sqrt{n}$. Então um dos métodos para testar a primalidade de um número inteiro, n≥2, consistirá em testar a sua divisibilidade pelos números primos $p \leq \sqrt{n}$.

Para testar a primalidade de 299, dividiremos então 299 por todos os primos inferiores a √299 = 17,29. Dividindo 299, sucessivamente, por 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17, observamos que 299 é divisível por 13. Tendo-se descoberto mais um divisor para além de 1 e do próprio número conclui-se que 299 não é um número primo.

À medida que se avança no conjunto dos números inteiros, verifica-se que os números primos se tornam cada vez mais raros. Perante este facto, os gregos questionaram se a partir de certa altura não existiria mais nenhum número primo, ou seja, se existiria um número primo maior de todos. Euclides, matemático grego do século III a.C, respondeu a esta questão demonstrando que a sucessão dos números primos é infinita.

Então após um número primo existirá sempre outro, infelizmente, a partir de certo ponto, a uma distância tão grande do seu antecessor que torna difícil a sua descoberta.

Muitos foram os matemáticos que tentaram descobrir uma função geradora para todos os números primos, mas sem sucesso. As sucessivas propostas de funções geradoras permitem encontrar uma sequência (limitada) de números primos, contudo todas elas falham ao gerar, a certa altura, números compostos.

Em 1772, Euler observou que a expressão $p(n) = n^2 + n + 41$ origina números primos, para valores de n entre 0 e 39. Gauss procurou descobrir a quantidade de primos entre um e um milhão, em vez de tentar descobrir a localização dos números primos. Em 1859, George F. B. Riemann, partindo da abordagem feita por Gauss, observou que a sequência dos números primos está intimamente relacionada com o comportamento da função $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$, chamada função Zeta de Riemann. A "Hipótese de Riemann" afirma que todas as soluções da equação $\zeta(s) = 0$, no plano complexo, descrevem uma linha vertical. Isto já foi verificado para mais de mil milhões de soluções, mas a demonstração de que a hipótese é verdadeira para todas as soluções ainda não foi encontrada. A "Hipótese de Riemann" é um dos problemas do milénio, cuja demonstração será premiada, pelo Clay Mathematics Institute, com 1 milhão de dólares mais rico.

Ainda que o mistério dos números primos não tenha ainda sido desvendado, ao longo dos séculos, têm tido destaque algumas particularidades relacionadas com estes números, que originaram uma espécie de famílias especiais de números primos. De entre as inúmeras famílias especiais de números primos conhecidas destacaremos seis, cujas definições apresentamos no Quadro 2 o seguinte.

Quadro 2 - Famílias especiais de números primos.

Família	Definição
Primos gémeos[1]	Dois números primos e , com , dizem-se primos gémeos se .
Primos de Mersenne[2]	Um número é um primo de Mersenne, quando for um par de números primos.
Primos de Germain[3]	Um número primo diz-se um primo de Germain se é um número primo.
Primos de Wilson[4]	Um número primo, , diz-se um primo de Wilson se divide
Primos factoriais[5]	Um número primo, , é primo factorial se é da forma
Super primos[6]	Um número primo, , é um super primo se a sua posição no conjunto dos números primos for um número primo.

[1] Gueye (2012) [2] Fine (2007) [3]Hill(1995) [4]Costa(2014) [5]Dubner(1987) [6]Dragoi(2017)

Os números de Ishango

Considerando uma planificação da superfície cilíndrica do osso de Ishango e seguindo a denotação adoptada por De Heinzelin, as colunas de traços presentes no osso são habitualmente designadas pelas letras M, G e D, correspondentes às letras iniciais das palavras francesas para meio (Milieu), esquerda (Gauche) e direita (Droite).

No Quadro 3 apresentamos, para cada coluna, o número total de traços e agrupamentos e os números (quantidades) representadas, no sentido do topo para a base do osso de Ishango.

Segundo Pletser; Huylebrouck (2008) não há certeza quanto a duas das quantidades de traços da coluna M (aqui assinalados com *) por se encontrarem numa zona danificada do osso.

Quadro 3 - Agrupamentos de traços no osso de Ishango, por coluna.

	Coluna		
	G	**M**	**D**
Total de traços:	60	48	60
Grupos de traços:	4	8	4
Números representados:	11, 13, 17, 19	3, 6, 4, 8, 10*, 5*, 5 e 7	11, 21, 19, 9

Fonte: elaborado pela autora.

Inicialmente o osso de Ishango foi assumido como mais um vestígio na categoria das ferramentas de contagem já conhecidas, como p.e. o osso de Lebombo, mas a observação mais atenta dos números representados, revelou propriedades numéricas que parecem testemunhar que, naquela época, existiria um conhecimento das propriedades dos números. Foi com base nessa premissa que De Heinzelin (1962) descreveu as marcas presentes no seu achado.

Apesar de alguns investigadores, como Keller (2015), defenderem que as interpretações associadas aos números de Ishango são algo fantasiosas e que para acreditar na sua veracidade se assenta mais numa crença que em evidências, outros (PLETSER; HUYLEBROUCK, 2008) aceitam que o osso revela o conhecimento de propriedades como a duplicação, mas que o conhecimento desta não permite sustentar outras suposições, como o conhecimento do conceito de primalidade. Seja como for, parece inegável que os agrupamentos de traços, presentes no osso de Ishango, não foram fruto do acaso.

Não sendo nossa pretensão interpretar o significado dos números associados às incisões no osso de Ishango, a nossa abordagem resumir-se-á à identificação dos números primos nele presentes, destacando algumas propriedades interessantes desses números.

No osso de Ishango estão presentes 16 agrupamentos de traços que, devido às repetições, correspondem a 13 números. De entre esses, o conjunto dos números primos representados no osso de Ishango é I_p={3 ,5,7,11,13,17,19} que corresponde ao conjunto dos sete primeiros números primos ímpares.

No osso de Ishango estão representados, portanto, 7 números primos (10, se considerarmos as repetições) e 6 números compostos.

Os números que surgem repetidos 5, 11 e 19 são os primeiros três números primos existentes da forma $n^2 - n - 1$.

A coluna G é composta exclusivamente por números primos. Nela estão representados os números 11, 13, 17 e 19, ou seja, os números primos entre 10 e 20, que surgem pela sua ordem natural.

A soma de todos os números representados no osso de Ishango (168) corresponde à quantidade de números primos inferiores a 1000.

No Quadro 4, os números primos presentes no osso de Ishango são classificados de acordo com a família especial a que pertencem:

Quadro 4 - Números primos no osso de Ishango, por família.

Família de primos	Primos de Ishango
Primos Gémeos	(5,7) , (11,13) e (17,19)
Primos de Mersenne	3 e 7
Primos de Germain	3, 5 e 11
Primos de Wilson	5 e 13
Primos Factoriais	3, 5 e 7
Super primos	3, 5, 11, 17

Fonte: elaborado pela autora.

Conclusão

Muitos dos antigos vestígios da raça humana, chegados aos nossos dias, são também testemunhos da história da Matemática. Num dos mais importantes vestígios históricos com manifestações matemáticas conscientes, o osso de Ishango, podem ser observadas representações de um conjunto de números que tem dado origem a várias interpretações. Não sendo consensual a hipótese de que o(s) autor(es) das marcas presentes no osso de Ishango conheciam o conceito de primalidade, é factual a existência da representação de sete números primos. Numa breve análise dos números primos no osso de Ishango, destacámos alguns factos interessantes relacionados com esses números primos e fizemos a sua associação a seis das inúmeras famílias especiais de números primos existentes.

Referências

BANGURA, A. **African Mathematics: From Bones to Computers**. San Diego, CA: Cognella Press, 2012.

CAMPOS, M.; FUHR, I. As origens da Matemática e os variados modos de operação com seus conceitos. **Projeção e docência**, v. 8, n.1, p.79-90, 2017.

COSTA, E.; GERBICZ, R.; HARVEY, D. A search for Wilson primes, **Mathematics of Computation**, v. 83, p.3071–3091, 2014.

CREVECOEUR, I. *et al.* Late Stone Age human remains from Ishango (Democratic Republic of Congo): New insights on Late Pleistocene modern human diversity in Africa. **Journal of Human Evolution**, v. 96, p.35-57, 2016.

DE HEINZELIN, J. Ishango. **Scientific American** v. 206, n. 6, p. 105-118, 1962.

DE HEINZELIN, J. **Exploration du Parc National Albert: Les fouilles d'Ishango**, Fascicule 2, Institut des Parcs Nationaux du Congo Belge, Brussels, 1957.

D'ERRICO, F.;HENSHIWOOD, G.; LAWSON, M; VANHAEREN, A. M.; TILLIER, M. Archaeological evidence for the emergence of language symbolism and music: an alternative multidisciplinary perspective. **Journal of World Prehistory,** v.17, p. 1-70, 2003.

DUBNER, H. Factorial and primorial primes, **Journal of Recreational Mathematics**, v.19, n.3, p.197-203, 1987.

DRAGOI, A. The "Vertical" Generalization of the Binary Goldbach's Conjecture as Applied on "Iterative" Primes with (Recursive) Prime Indexes (i-primeths) **Journal of Advances in Mathematics and Computer Science**, v.25, n.2, p.1-32, 2017.

FINE, B.; ROSENBERGER, G. **Number theory: an introduction via the distribution of primes**. Birkauser, 2007.

GUEYE, I. Twin Primes and Sophie Germain's Prime Numbers", **The Bulletin of Society for Mathematical Services and Standards**, v.6, p. 1-3, 2013.

HILL, A. **Sophie Germain: a mathematical biography**. 1995. A thesis Presented to the Department of Mathematic and the Honors College of the University of Oregon, 1995.

ISHANGO MILELE Foundation. **International programme, 2018-2019**. Disponível em: https://www.gutesache.be/media/32033/00-prog-40p-uk-im-wm.pdf. Acesso em: 27 nov. 2017.

KELLER, O. **The fables of Ishango, or the irresistible temptation of mathematical fiction**. Translated from the French (2010) by Helen Tomlinson, 2015.Disponível em: https://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/ishango-analysis Acesso em: a 1 dez. 2018.

MARSHACK, A. **Roots of Civilisation, The Cognitive beginnings of Man's First Art, Symbol and Notation**, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

PICKOVER, C. **The Math Book:** From Pythagoras to the 57th Dimension, Sterling Publishing Co, New York, 2009.

PLETSER, V.; HUYLEBROUCK D. The Ishango Artefact: the Missing Base 12 Link. In: T. Ogawa, S. Mitamura, D. Nagy & R. Takaki (ed.), **PROC. KATACHI U SYMMETRY KUS2**, paper C11, Tsukuba Univ., Japan, 18 Nov. 1999; Forma, 1999, p.339-346.

PLETSER, V.; HUYLEBROUCK D. An interpretation of the Ishango rods. In: **PROC. CONF. "ISHANGO, 22000 AND 50 YEARS LATER: the cradle of Mathematics?"**, D. Huylebrouck ed., Koninklijke Vlaamse Academie van Belgie voor Wetenschappen en Kunsten, KVAB, 2008, p.139-170.

PLETSER, V. **The oath of Ishango:** why and what for? Ishango Milele Foundation, [201-?]

PLETSER, V. **Does the Ishango bone indicate knowledge of the base 12?** An interpretation of a prehistoric discovery, the first mathematical tool of humankind. arXiv:1204.1019, 2012.

REDONDO, F.; MARTÍN-LOECHES, M.; POBES, E. Prehistoria de la matemática y mente moderna: pensamiento matemático y recursividad en el Paleolítico franco-cantábrico. **Dynamis**, 30, p.167-195, 2010.

STEWART, I. **Em busca do infinito**. Editora Zahar, 2007.

STRUIK, D.J. Stone Age Mathematic. **Scientific American**, v. 179, n.6, p. 44-49, 1948.